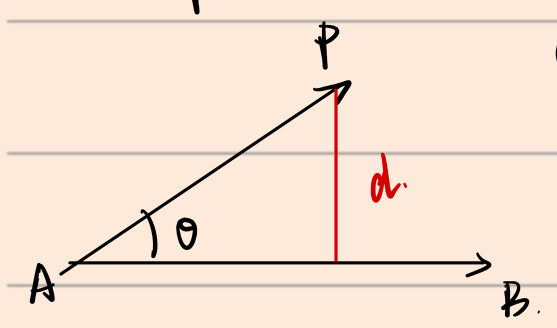
课堂总结

点到线的距离



$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{d}{|\overrightarrow{PA}|}$$

$$d = |\overrightarrow{PA}|\cdot\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB})^2}{|\overrightarrow{AP}|^2\cdot|\overrightarrow{AB}|^2}} = \sqrt{\overrightarrow{PA}-\frac{(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB})^2}{|\overrightarrow{AB}|^2}}.$$

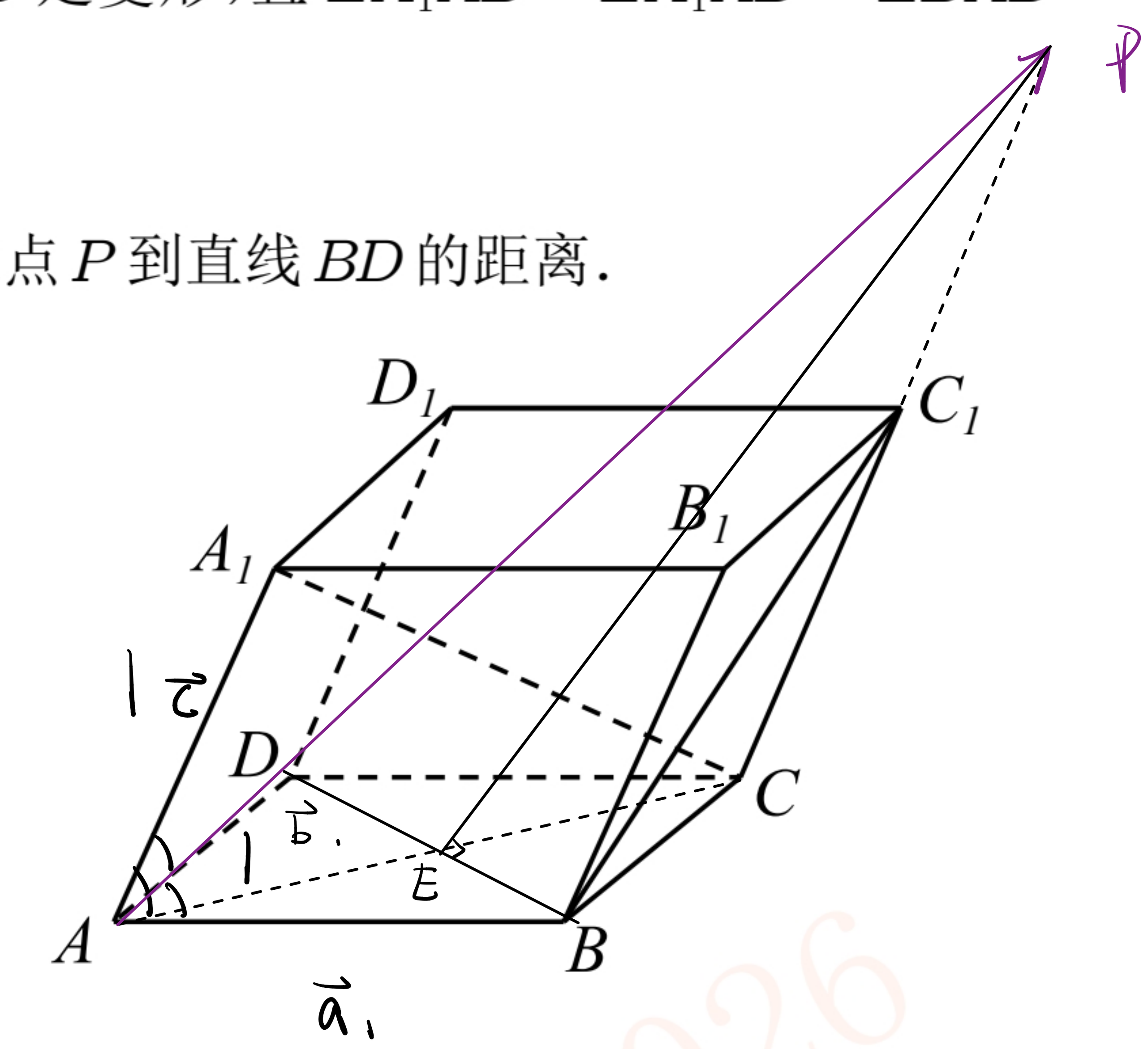
不背公式

第 2 讲:空间向量题型拓展 (2)

1. 如图,平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 是菱形,且 $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60^\circ$,$AD=AA_1=1$.

(1) 求 BC_1 与 A_1C 所成角的余弦值;

(2) 若空间有一点 P 满足:$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AA_1}$,求点 P 到直线 BD 的距离.



(1) $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{b}+\vec{c}$.

$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{A_1C}=(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})=1$.

麻烦. $\begin{cases}|\overrightarrow{BC_1}|=\sqrt{(\vec{b}+\vec{c})^2}=\sqrt{3}, \\ |\overrightarrow{A_1C}|=\sqrt{2}.\end{cases}$

$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{A_1C}|}{|\overrightarrow{BC_1}|\cdot|\overrightarrow{A_1C}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

(2) 设夹角为 α

$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BP}|}=\dfrac{|\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{PB}|}$

$\therefore |\overrightarrow{BE}|=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BD}|}$

$d=\sqrt{\overrightarrow{BP}^2-|\overrightarrow{BE}|^2}$

$=\sqrt{\overrightarrow{BP}^2-\dfrac{(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BP})^2}{\overrightarrow{BD}^2}}$

$=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$.

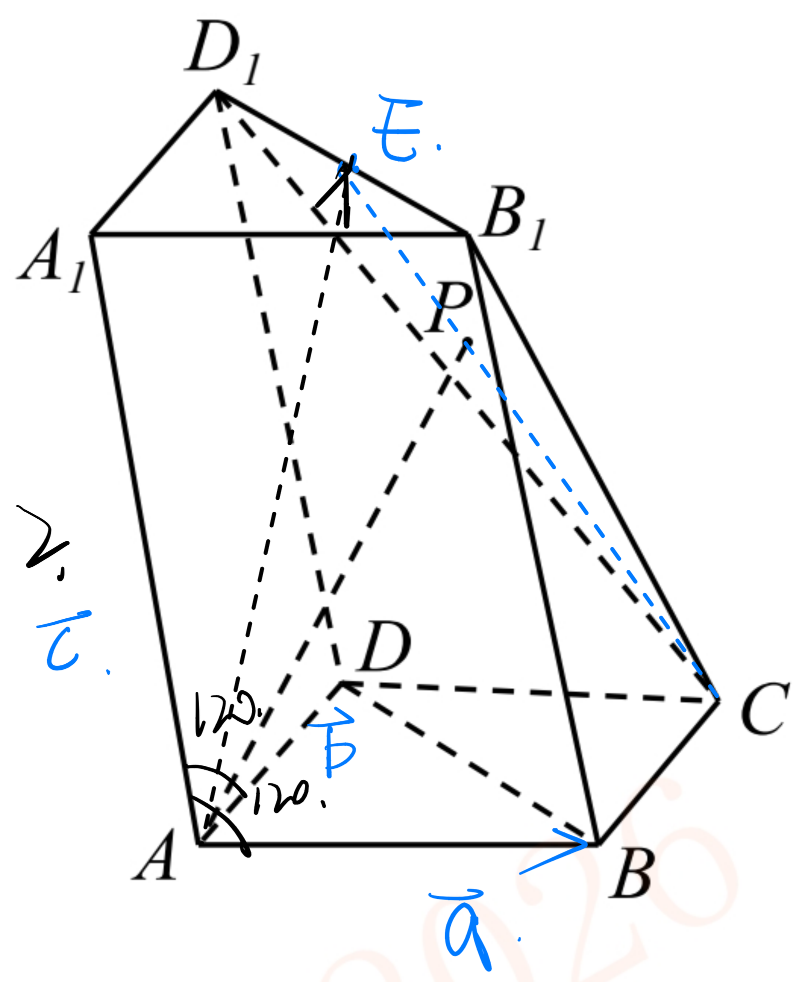
2. 如图，多面体 $A_1B_1D_1-ABCD$ 是将一个平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C-B_1C_1D_1$ 后剩下的几何体，点 P 为三角形 CB_1D_1 的重心．四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，且 $AA_1=2$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=120°$．

(1) 求证：$AP\perp BD$；

(2) 求线段 AP 的长；

(3) 求异面直线 AP 与 B_1C 所成角的余弦值．

$\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.



基底法

(1) $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1E})$.

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}(\vec{b}^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{c})=0$.

$\therefore BD\perp\overrightarrow{AP}$.

(2) $|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{4}{9}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$

$=\frac{4}{9}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c})$

$=\frac{4}{9}(6+0-2-2)=\frac{8}{9}$.

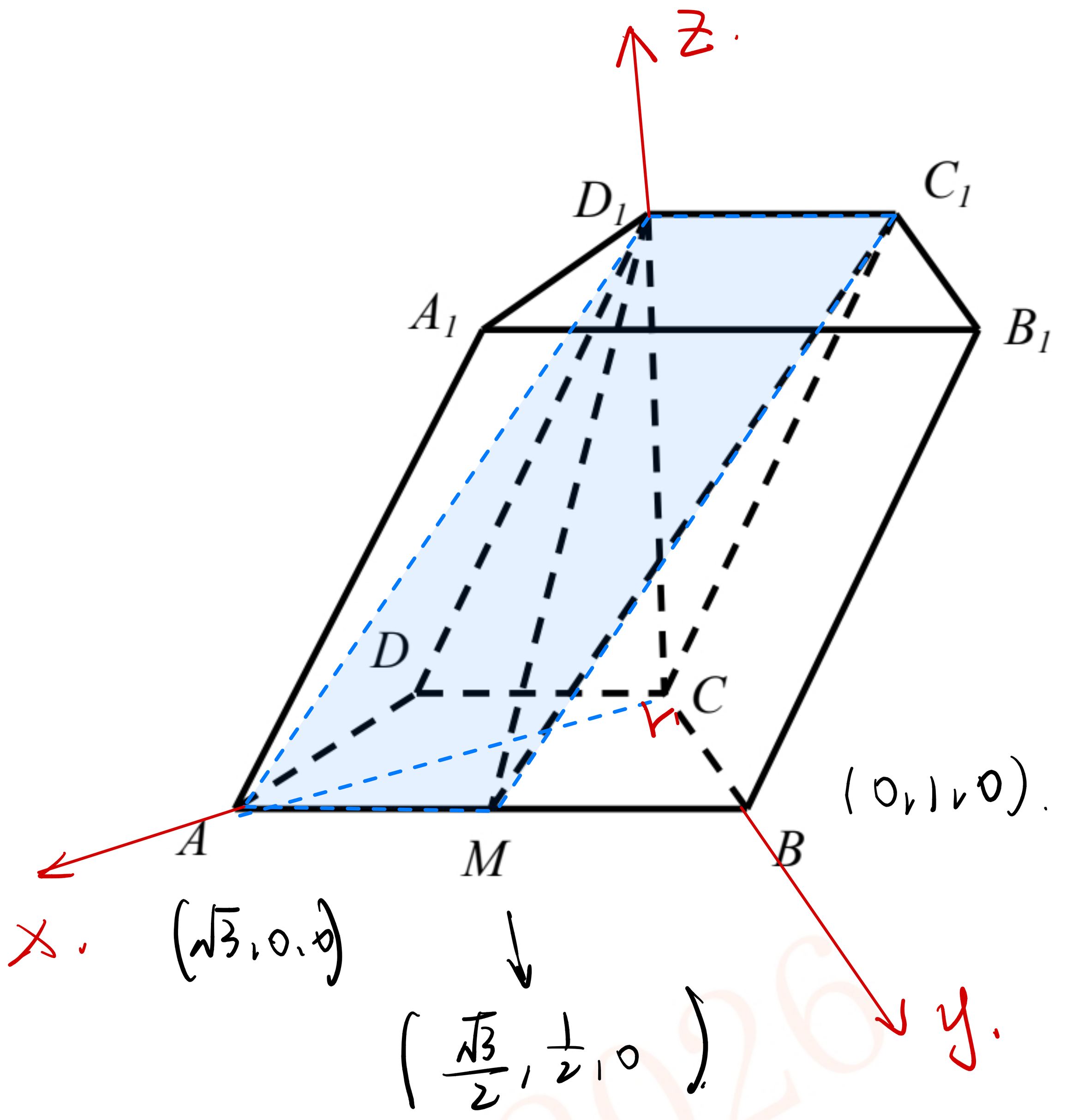
(3) $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{B_1C}|}{|AP|\cdot|B_1C|}$ $|\overrightarrow{B_1C}|=\sqrt{7}$.

$=\frac{\sqrt{14}}{7}$

3. 如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是等腰梯形，$\angle DAB=60^\circ$，$AB=2CD=2$，M 是线段 AB 的中点.

(Ⅰ) 求证：$C_1M \parallel A_1ADD_1$；

(Ⅱ) 若 CD_1 垂直于平面 $ABCD$ 且 $CD_1=\sqrt{3}$，求平面 C_1D_1M 和平面 $ABCD$ 所成的角 (锐角) 的余弦值.



(Ⅰ). $C_1D_1 \underline{\parallel} AM$.

四边形 AMC_1D_1 为 ▱.

(Ⅱ). 先证 $CA \perp CB$.

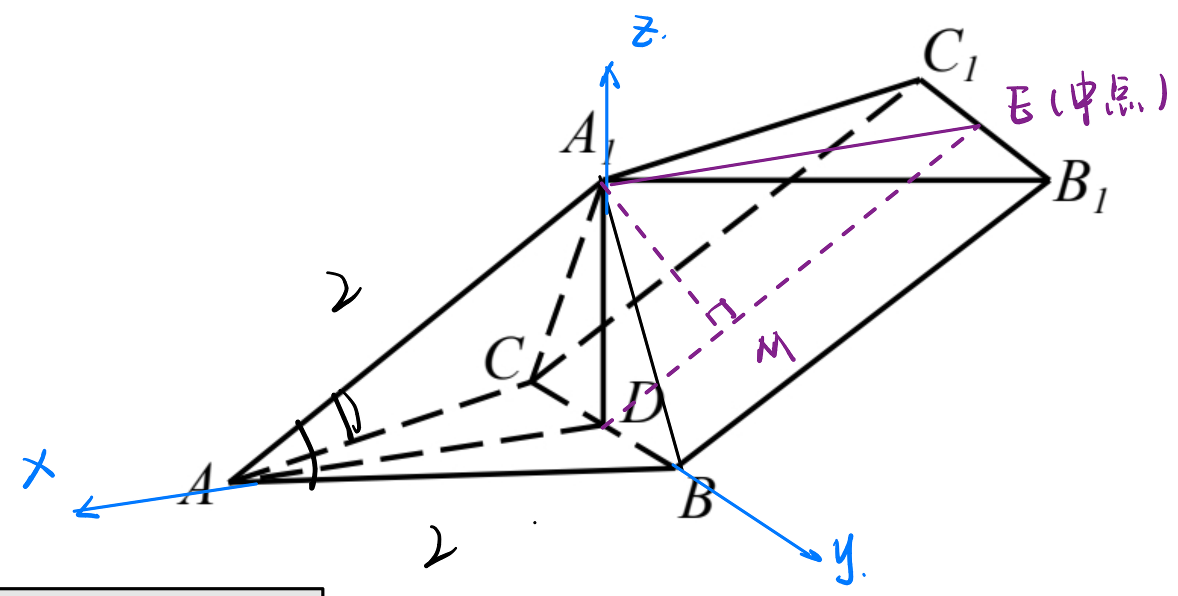
以 CA, CB, CD_1 所在直线为 x, y, z 轴

建立直角坐标系.

4. 如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，$AB=AA_1=2$，$\angle A_1AB=\angle A_1AC$，$D$ 是 BC 的中点.

(1) 证明：平面 $A_1AD\perp$ 平面 ABC；

(2) 若 $\cos\angle A_1AB=\dfrac{3}{4}$，求点 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离.



(1) ∵ $AB=AC$. $\angle A_1AB=\angle A_1AC$

∴ $\triangle ABA_1\cong\triangle ACA_1$

∴ $A_1C=A_1B$.

∵ D 为 BC 中点

∴ $A_1D\perp BC$.

∵ $AB=AC$. D 为 BC 中点.

∴ $AD\perp BC$.

∵ $A_1D\cap AD=D$.

∴ $BC\perp$ 面 AA_1D. ∵ $BC\subset$ 平面 ABC.

∴ 面 ABC ⊥ 面 AA_1D.

等体积法　作高.

建系

证明：AD

$A_1B=\sqrt{2}$.　$A_1C\perp A_1B$.

$A_1D=\frac{1}{2}BC=1$.

∴ $A_1D^2+AD^2=AA_1^2$ 即 $A_1D\perp AD$.

又 ∵ $AD\perp BC$.　∴ $AD\perp$ 面 ABC.

(2). 在 $\triangle A_1AB$ 中. 由余弦定理.

$A_1B^2=4+4-2\cdot2\cdot2\cos\angle A_1AB=2$.

设平面 BCC_1B_1 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$.

$\overrightarrow{BC}=(0,-2,0)$.

$\vec{n}=(1,0,\sqrt{3})$.

难题.

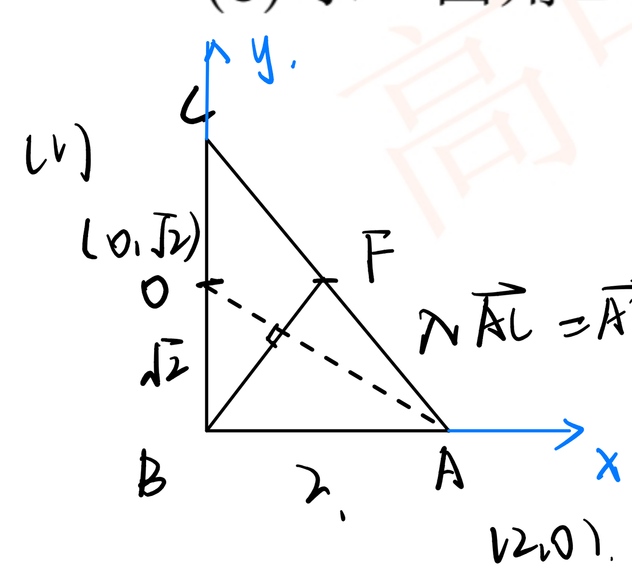
5. (2023·乙卷) 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{5}DO$，BP，AP，BC 的中点分别为 D，E，O，点 F 在 AC 上，$BF\perp AO$.

(1) 证明：EF // 平面 ADO；　DO 为 △BPC 中位线　证 F 为 AC 中点.

(2) 证明：平面 $ADO\perp$ 平面 BEF；

(3) 求二面角 $D-AO-C$ 的正弦值.

(1)



$\overrightarrow{AO}=(-2,\sqrt{2})$.　$\overrightarrow{AC}=(-2,2\sqrt{2})$

$\lambda\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}=(-2\lambda,2\sqrt{2}\lambda)$.

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=(2-2\lambda,2\sqrt{2}\lambda)$.

$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AO}$

$=-4+4\lambda+4\lambda=0$,

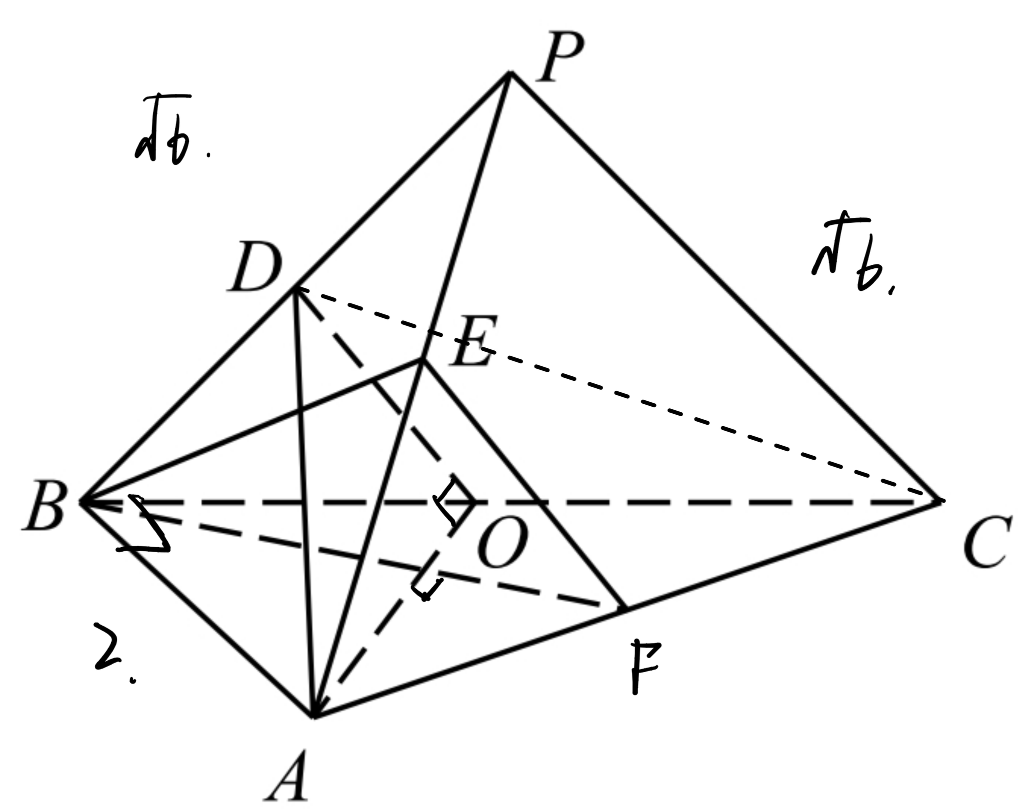
$\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$.

F 为 AC 中点.

EF 为 △APC 中位线.

EF // PC // DO

(3)



(2) 已知 $BF\perp AO$.

$DO=\frac{\sqrt{6}}{2}$.　$AD=\frac{\sqrt{30}}{2}$　$AO=\sqrt{6}$.

∵ $DO^2+AO^2=AD^2$.

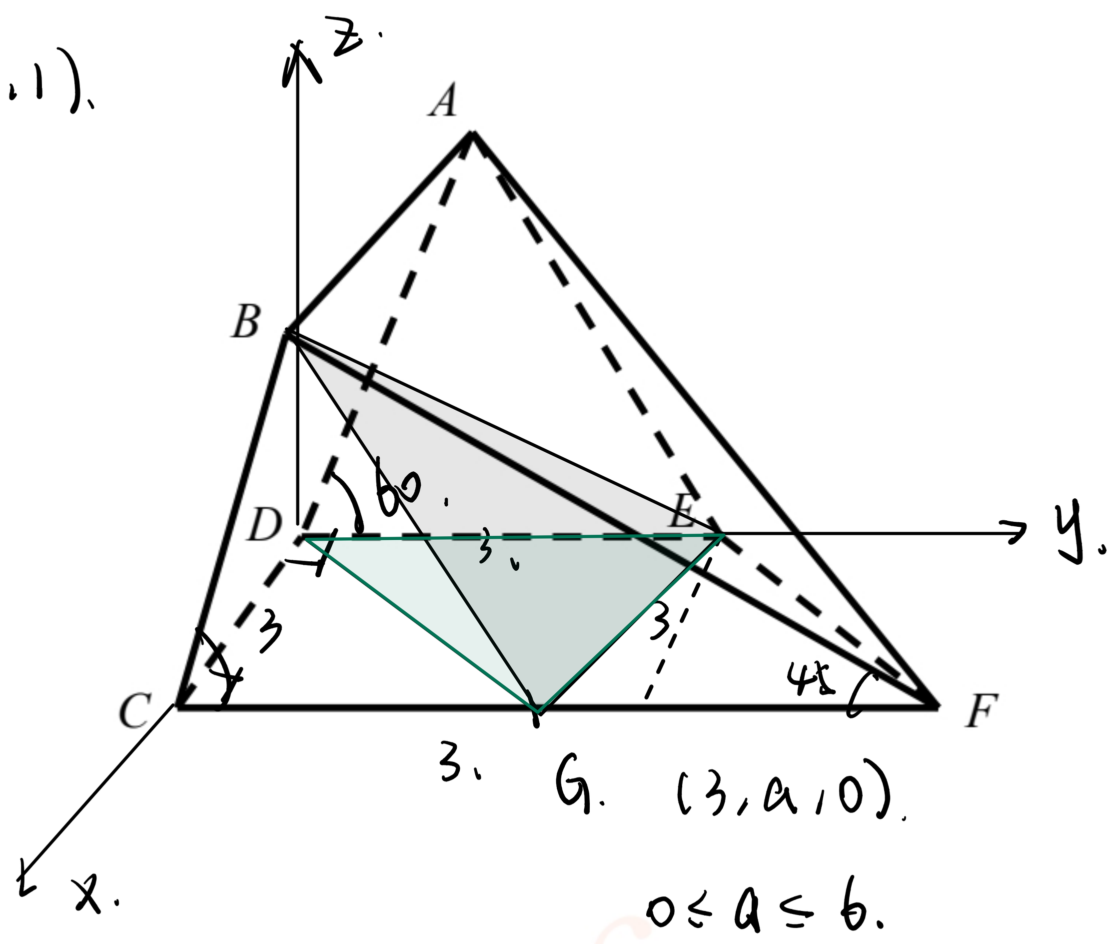
∴ $AO\perp DO$.

6. 如图，矩形 $ABCD$ 所在的半平面和直角梯形 $CDEF$ 所在的半平面成 60° 的二面角，$DE \parallel CF$，$CD \perp DE$，$AD=2$，$EF=3\sqrt{2}$，$CF=6$，$\angle CFE=45^\circ$.

(Ⅰ) 求证：$BF \parallel$ 平面 ADE； $CF \parallel DE$. $BC \parallel AD$.

(Ⅱ) 在线段 CF 上求一点 G，使锐二面角 $B-EG-D$ 的余弦值为 $\frac{1}{4}$. 反着考

$\vec{n}=(x,y,z)$ $\vec{m}=(0,0,1)$.



$\overrightarrow{EG}=(3,a-3,0)$

$\overrightarrow{BE}=(-3,2,-\sqrt{3})$.

$\vec{n}=(3-a,3,\sqrt{3}a-\sqrt{3})$.

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|\sqrt{3}a-\sqrt{3}|}{\sqrt{\cdots}}=\dfrac{1}{4}$.

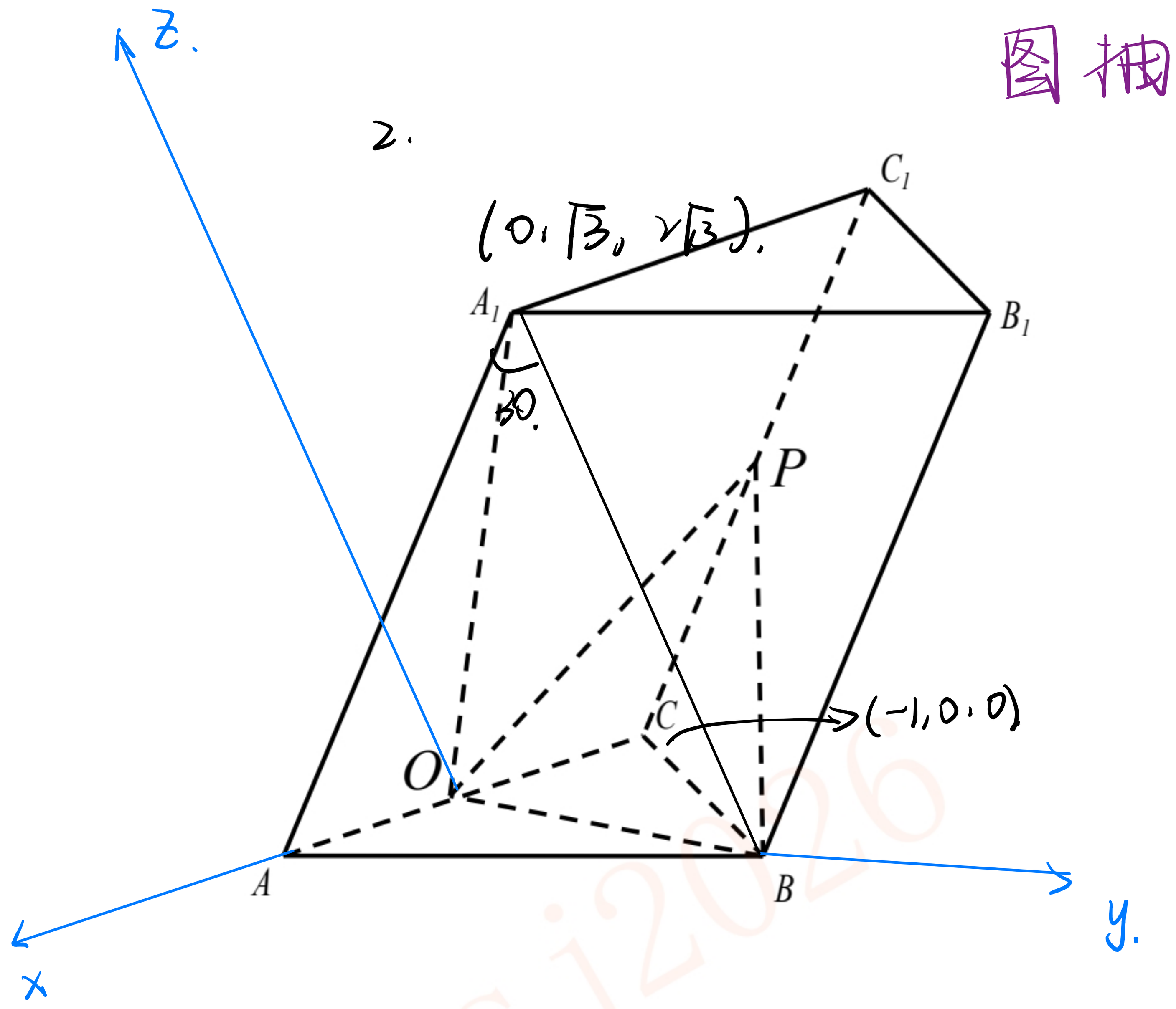
7. 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是等边三角形，平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 ABC，$A_1B\perp AB$，$AC=2$，$\angle A_1AB=60^\circ$，O 为 AC 的中点.

(Ⅰ) 求证：$AC\perp$ 平面 A_1BO；

$AC\perp OB$，$AC\perp A_1B$ $\Rightarrow$ $AC\perp$ 面 A_1BO.

(Ⅱ) 试问线段 CC_1 是否存在点 P，使得二面角 $P-OB-A_1$ 的平面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$，若存在，请计算 $\frac{CP}{CC_1}$ 的值；若不存在，请说明理由.

图抽象.



(2) 求平面 OBA_1 的法向量.

$\vec{m}=\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$

$\overrightarrow{OB}=(0,\sqrt{3},0)$.

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OC}+\lambda\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{OC}+\lambda\overrightarrow{AA_1}$

$=(-1,0,0)+\lambda(-1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

$=(-1-\lambda,\sqrt{3}\lambda,2\sqrt{3}\lambda)$.

$\vec{n}=(2\sqrt{3}\lambda,0,\lambda+1)$.

$\cos\theta=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2\sqrt{3}\lambda}{1\cdot\sqrt{12\lambda^2+\lambda^2+2\lambda+1}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$

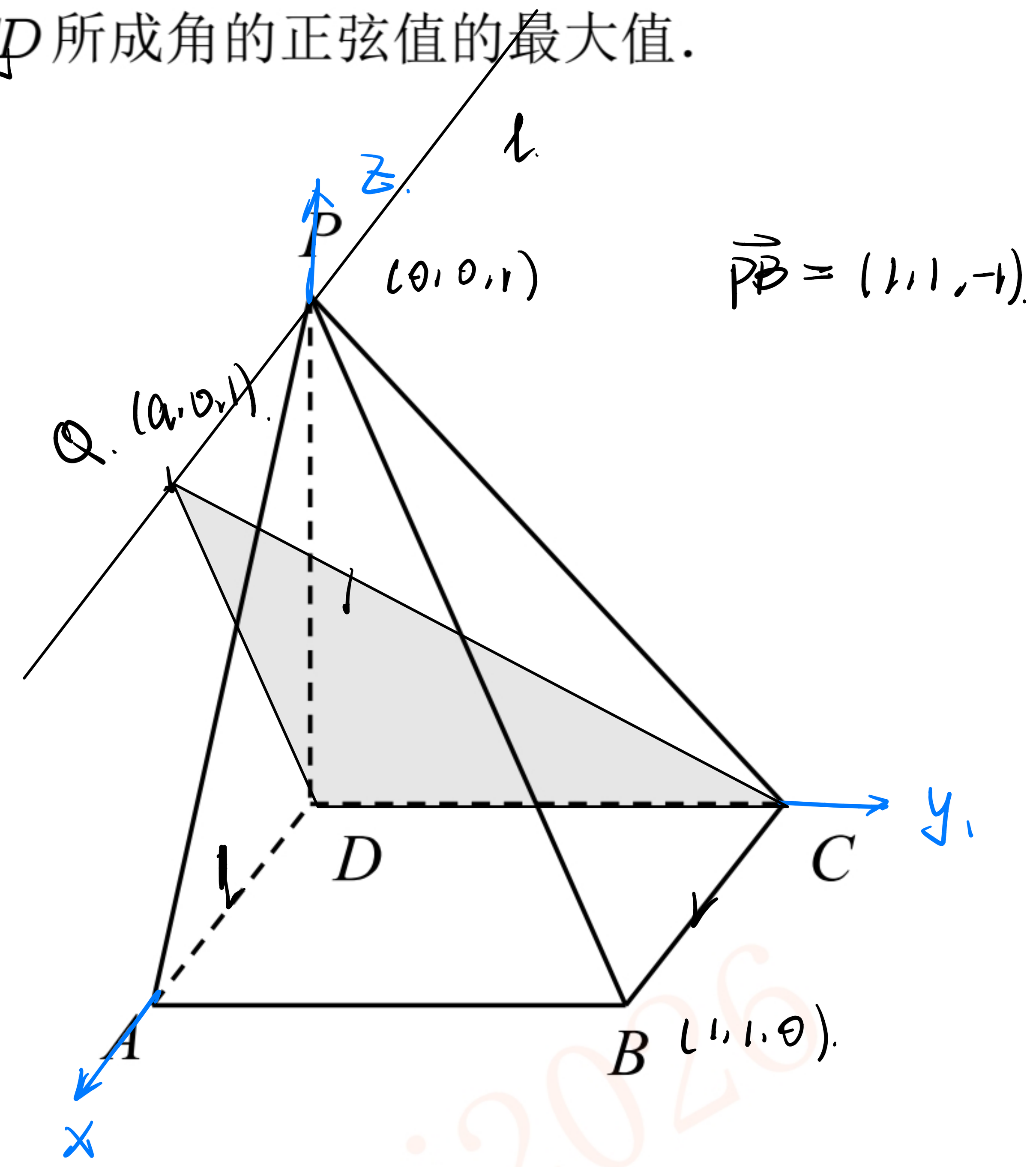
解得 $8\lambda^2-2\lambda-1=0$.

$\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=-\frac{1}{4}$ (舍).

8. (2020 新高考Ⅰ) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.

(1) 证明：$l\perp$ 平面 PDC；

(2) 已知 $PD=AD=1$，Q 为 l 上的点，求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.



(1) ∵ ABCD 为正方形.

∴ BC // AD.

∵ BC ⊄ 面 PAD，AD ⊂ 面 PAD.

∴ BC // 面 PAD.

∵ BC ⊂ 平面 PBC. 面 PBC ∩ 面 PAD = l

BC // l.

∵ PA ⊥ 面 ABCD. BC ⊂ 面 ABCD

∴ PD ⊥ BC. 又 ∵ BC ⊥ CD. CD ∩ PD = D.

∴ BC ⊥ 面 PCD. ∴ l ⊥ 面 PCD.

(2). 平面 QCD 的法向量 $\vec{n}=(-1,0,a)$.

$a\in R$.

$$\sin\alpha=|\cos\theta|=\frac{|\vec{PB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{PB}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|a+1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{a^2+2a+1}{a^2+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1+\frac{2a}{a^2+1}}$$

1°. 当 $a\le 0$ 时. 取不到最大.

2°. 当 $a>0$ 时 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{a+\frac{1}{a}}}$

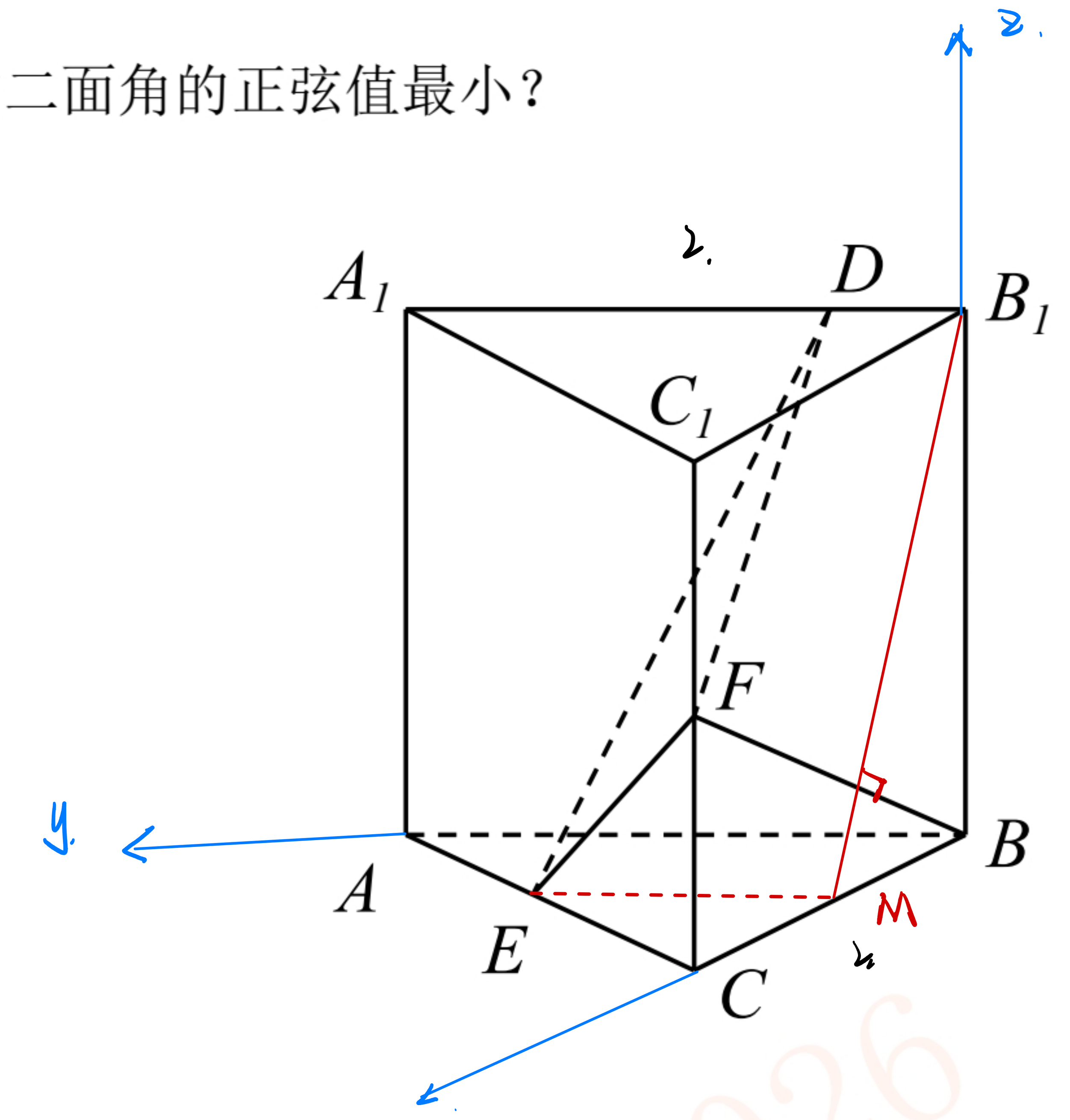
均值不等式

9. (2021 甲卷) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形，$AB=BC=2$，E，F 分别为 AC 和 CC_1 的中点，D 为棱 A_1B_1 上的点，$BF\perp A_1B_1$.

(1) 证明：$BF\perp DE$；

(2) 当 B_1D 为何值时，面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小？

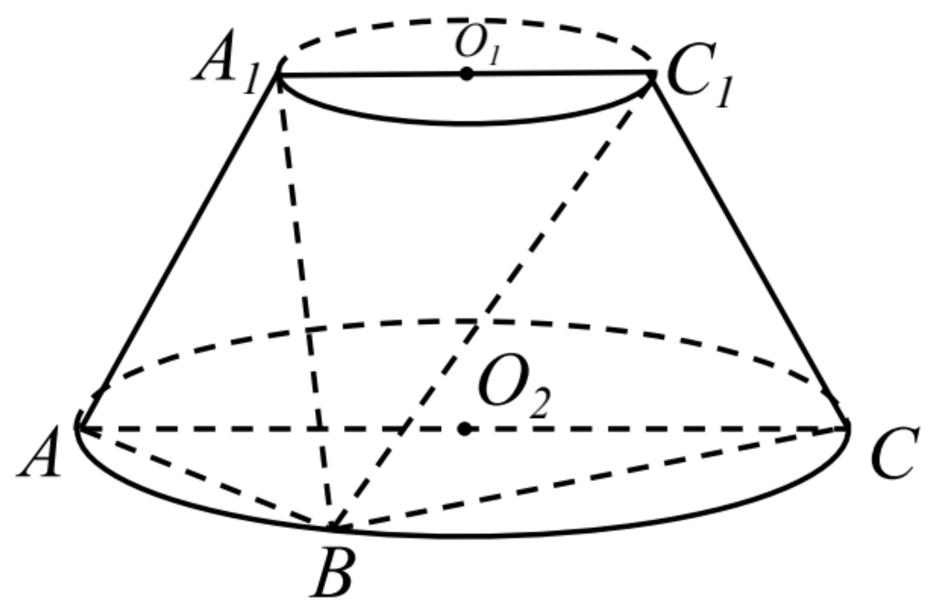
$A_1B_1\perp B_1C_1$.



10. 如图，圆台 O_1O_2 的轴截面为等腰梯形 A_1ACC_1，$AC=2AA_1=2A_1C_1=4$，B 为底面圆周上异于 A，C 的点.

(1) 在平面 BCC_1 内，过 C_1 作一条直线与平面 A_1AB 平行，并说明理由；

(2) 设平面 $A_1AB\cap$ 平面 $C_1CB=l$，$Q\in l$，BC_1 与平面 QAC 所成角为 α，当四棱锥 $B-A_1ACC_1$ 的体积最大时，求 $\sin\alpha$ 的取值范围.



作业

1. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，D，E，F，G 分别为 AA_1，AC，A_1C_1，BB_1 的中点，$AB=BC=\sqrt{5}$，$AC=AA_1=2$.

(Ⅰ) 求证：$AC\perp$ 平面 BEF；

(Ⅱ) 求二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值；

(Ⅲ) 证明：直线 FG 与平面 BCD 相交.